

圏論におけるカノニカル位相と有効エピ射族の精緻な決定

はじめに

本稿では、Grothendieck位相（Grothendieck topology）および層（sheaf）の理論において、基礎となる圏における「カノニカル位相（canonical topology）」の振る舞いを精緻に解説します。通常の層の理論では被覆族の安定性を定式化するためにファイバー積を利用しますが、ファイバー積が存在しない圏においても、「篩（sieve）」という概念を用いることで見通しよく理論を展開できます。

本稿は前半で、「カノニカル位相」と「有効エピ射族（effective epimorphic family）」の厳密な関係性を紐解き、**有効エピ射的な篩の族が実際にGrothendieck位相の公理を満たすことの完全な証明**を与えます。後半では、対象が1つしかないモノイド圏における連続写像の振る舞い、および位相空間の開集合系からなる圏 $\mathbf{Open}(X)$ を取り上げ、この圏におけるカノニカル位相が我々がよく知る「通常の開被覆」と完全に一致することの証明を与えます。

1. 基礎概念の準備：篩と有効エピ射

ファイバー積を持たない圏 $\mathcal{B}$ において、射の族をうまく扱うための道具が「篩 (sieve)」である。篩は、対象への射の集まり全体を包み込む「右イデアル」のような構造を持つ。

定義 1.1：篩 (sieve)

圏 $\mathcal{B}$ の対象 Y 上の篩 S とは、 Y を余域とする射の集まりであって、以下の条件を満たすものをいう。

- 任意の射 $f: X \rightarrow Y$ が S に属し、かつ任意の射 $g: W \rightarrow X$ が $\mathcal{B}$ 内に存在するとき、その合成 $f \circ g: W \rightarrow Y$ も必ず S に属する。

関手の言葉で言えば、篩 S を与えることは、表現可能前層 (representable presheaf) $h_Y = \mathcal{B}(-, Y)$ の部分関手 (subfunctor) $S \subset h_Y$ を与えることと同値である。

任意の射の族 $\mathcal{U} = \{f_i: X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$ が与えられたとき、それらの射と任意の射との合成で書ける射全体を集めることで、 $\mathcal{U}$ が生成する篩 $S_{\mathcal{U}}$ を作ることができる。これにより、射の族を単一の部分関手として取り扱うことが可能となる。

定義 1.2：有効エピ射族 (effective epimorphic family) と 有効エピ射 (effective epimorphism)

対象 $Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{B})$ への射の族 $\mathcal{U} = \{f_i: X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$ が有効エピ射族であるとは、 $\mathcal{U}$ が生成する篩 S に対して、任意の対象 $Z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{B})$ について以下の自然な写像が全単射 ($\mathbf{Set}$ における同型) になることをいう。

$$\mathcal{B}(Y, Z) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Nat}(S, h_Z)$$

ここで、 $\mathbf{Nat}(S, h_Z)$ は部分関手 S から表現可能前層 $h_Z = \mathcal{B}(-, Z)$ への自然変換の集合である。

単一の射 $e: X \rightarrow Y$ が有効エピ射であるとは、単集合からなる族 $\{e\}$ が有効エピ射族であること、すなわち e が生成する主篩 (principal sieve) が上記の全単射条件を満たすことをいう。

2. カノニカル位相と表現可能性

Grothendieck位相は、被覆篩 (covering sieve) を指定することによって定義される。カノニカル位相は、表現可能性と層の条

件を結びつける最も重要な位相である。

定義 2.1：層 (sheaf) とカノニカル位相 (canonical topology)

前層 $P: \mathcal{B}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ が対象 Y 上の篩 S に関して層の公理を満たすとは、自然な写像 $P(Y) \rightarrow \text{Nat}(S, P)$ が全単射になることである。米田の補題 (Yoneda lemma) により $P(Y) \cong \text{Nat}(h_Y, P)$ であるから、これは「部分関手 S 上で定義された自然変換が h_Y 全体に一意に拡張できること」を意味する。

圏 $\mathcal{B}$ 上のカノニカル位相 J_{can} とは、すべての表現可能前層 h_Z が層になるような最大の Grothendieck 位相のことである。

定理 2.2：表現可能前層を層にする篩と有効エピ射的な篩の同値性

圏 $\mathcal{B}$ 上の篩 S が「すべての表現可能前層 h_Z を層にする」という条件を満たすことと、 S が有効エピ射的な篩（すなわち、定義 1.2 を満たすこと）は完全に同値である。

証明

表現可能前層 $h_Z = \mathcal{B}(-, Z)$ を任意にとる。篩 $S \subset h_Y$ に関して h_Z が層の公理を満たすための条件は、定義より以下の自然な写像が全単射になることである。

$$h_Z(Y) \xrightarrow{\cong} \text{Nat}(S, h_Z)$$

左辺の $h_Z(Y)$ は定義により $\mathcal{B}(Y, Z)$ であるため、この条件は次のように書き換えられる。

$$\mathcal{B}(Y, Z) \xrightarrow{\cong} \text{Nat}(S, h_Z)$$

この方程式は、まさに「有効エピ射的な篩」の定義そのものである。したがって、任意の対象 Z について表現可能関手 h_Z が篩 S に関して層になることと、 S が有効エピ射的な篩であることは論理的に完全に同値である。証明終。

注意：

カノニカル位相 J_{can} は「すべての表現可能関手が層になる最大の位相」として定義されます。定理 2.2 より、カノニカル位相の被覆篩は必ず有効エピ射的となりますが、逆は一般の圏では必ずしも成り立ちません。なぜなら、「有効エピ射的な篩の全体」が、ベースチェンジ（引き戻し）に対する安定性などの Grothendieck 位相の公理を自動的に満たすとは限らないからです。次のセクションで、これらが位相をなすための条件と、その完全な証明を与えます。

3. 有効エピ射的な篩の族が Grothendieck 位相をなすことの完全な証明

対象 Y 上の有効エピ射的な篩全体の集まりを $\mathcal{E}(Y)$ と記述する。圏 $\mathcal{B}$ において、有効エピ射性が普遍的 (universal) である、すなわち任意の有効エピ射的な篩が任意の射による引き戻しによって再び有効エピ射的な篩になる（ベースチェンジで安定である）と仮定する。

この仮定の下で、族 $\mathcal{E}$ が実際に Grothendieck 位相の3つの公理（最大篩、ベースチェンジ、推移律）をすべて満たし、カノニカル位相 J_{can} と完全に一致することのフルな（完全な）証明を書き下す。

定理 3.1： $\mathcal{E}$ が Grothendieck 位相となることの証明

普遍的有効エピ射性を持つ圏において、集まり $\mathcal{E}$ は Grothendieck 位相をなす。

証明

Grothendieck 位相が満たすべき3つの公理を順に検証する。

【公理1：最大篩の含有】

任意の対象 Y 上の最大篩 $t_Y = h_Y$ （すなわち $\mathcal{B}(-, Y)$ 全体）が $\mathcal{E}(Y)$ に属することを示す。

任意の対象 Z をとる。米田の補題より、自然な全単射 $\text{Nat}(h_Y, h_Z) \cong h_Z(Y) = \mathcal{B}(Y, Z)$ が存在する。これはまさに t_Y が有効エピ射的な篩であることの定義式に他ならない。したがって $t_Y \in \mathcal{E}(Y)$ である。

【公理2：ベースチェンジ（引き戻し）による安定性】

$S \in \mathcal{E}(Y)$ とし、 $f: X \rightarrow Y$ を任意の射とする。引き戻し篩 $f^*S = \{g: W \rightarrow X \mid f \circ g \in S\}$ が $\mathcal{E}(X)$ に属することを示す。

これは本定理の前提である「圏 $\mathcal{B}$ において有効エピ射性が普遍的である」という仮定そのものであるため、自動的に満たされる。

【公理3：推移律 (local character)】

$S \in \mathcal{E}(Y)$ とし、 R を Y 上の任意の篩とする。「すべての $f \in S$ ($f: X \rightarrow Y$) に対して、引き戻し $f^*R \in \mathcal{E}(X)$ である」と仮定したとき、 $R \in \mathcal{E}(Y)$ であることを示す。

$R \in \mathcal{E}(Y)$ を示すには、任意の対象 Z と任意の自然変換 $\alpha: R \rightarrow h_Z$ に対して、それを引き起こす射 $y: Y \rightarrow Z$ が一意に存在することを示せばよい。

(存在の証明)

$\alpha: R \rightarrow h_Z$ を任意にとる。仮定より、各 $f \in S$ ($f: X \rightarrow Y$) について、 $f^*R \in \mathcal{E}(X)$ である。

引き戻しの定義より、任意の $k \in f^*R$ ($k: U \rightarrow X$) に対して $f \circ k \in R$ であるため、自然変換 $\beta_f: f^*R \rightarrow h_Z$ を

$$\beta_f(k) = \alpha(f \circ k)$$

によってwell-definedに定義できる。

$f^*R \in \mathcal{E}(X)$ であるから、この自然変換 β_f はただ一つの射 $x_f: X \rightarrow Z$ によって引き起こされる。すなわち、任意の $k \in f^*R$ について $\beta_f(k) = x_f \circ k$ となる。

いま、 S の元 $f: X \rightarrow Y$ たちに対して、射 $x_f: X \rightarrow Z$ の集まりが得られた。これが S 上の自然変換 $\gamma: S \rightarrow h_Z$ を定めていること（すなわち $m: V \rightarrow X$ について $x_{f \circ m} = x_f \circ m$ となること）を示す。

これらが等しいことを示すために、 V 上の有効エピ射的な篩 $(f \circ m)^*R$ を用いる（公理2の仮定よりこれも $\mathcal{E}(V)$ に属する）。

任意の $l \in (f \circ m)^*R$ ($l: W \rightarrow V$) をとる。すると $(f \circ m) \circ l \in R$ であり、

$$x_{f \circ m} \circ l = \beta_{f \circ m}(l) = \alpha(f \circ m \circ l)$$

となる。一方、 $m \circ l \in f^*R$ であるから、

$$(x_f \circ m) \circ l = x_f \circ (m \circ l) = \beta_f(m \circ l) = \alpha(f \circ (m \circ l)) = \alpha(f \circ m \circ l)$$

となる。したがって、 $x_{f \circ m} \circ l = (x_f \circ m) \circ l$ となる。これは2つの射 $x_{f \circ m}$ と $x_f \circ m$ が有効エピ射的な篩 $(f \circ m)^*R$ 上で同じ自然変換を引き起こすことを意味する。一意性より $x_{f \circ m} = x_f \circ m$ が得られる。

これはまさに、射の集まり $\{x_f\}_{f \in S}$ が自然変換 $\gamma: S \rightarrow h_Z$ を定義していることを示している（ $\gamma(f) = x_f$ ）。

大元の仮定より $S \in \mathcal{E}(Y)$ であるから、この自然変換 γ はただ一つの射 $y: Y \rightarrow Z$ によって引き起こされる。すなわち任意の $f \in S$ について $x_f = y \circ f$ である。

最後に、この y が元の $\alpha: R \rightarrow h_Z$ を引き起こすこと、すなわち任意の $g \in R$ ($g: W \rightarrow Y$) について $y \circ g = \alpha(g)$ となることを示す。

これを示すため、篩 $g^*S \in \mathcal{E}(W)$ を用いる。任意の $m \in g^*S$ ($m: U \rightarrow W$) をとる。 $g \circ m \in S$ である。

$(y \circ g) \circ m = y \circ (g \circ m)$ であり、 $g \circ m \in S$ なので構成よりこれは $x_{g \circ m}$ に等しい。

さらに、この $x_{g \circ m}$ と $\alpha(g) \circ m$ が等しいことを示すため、篩 $(g \circ m)^*R \in \mathcal{E}(U)$ を用いる。任意の $l \in (g \circ m)^*R$ ($l: V \rightarrow U$) をとると、

$$x_{g \circ m} \circ l = \alpha(g \circ m \circ l)$$

となる。一方で α は自然変換であるから、

$$(\alpha(g) \circ m) \circ l = \alpha(g) \circ (m \circ l) = \alpha(g \circ m \circ l)$$

となる。よって $(g \circ m)^*R$ 上で一致し、一意性より $x_{g \circ m} = \alpha(g) \circ m$ となる。

以上より、 $(y \circ g) \circ m = \alpha(g) \circ m$ が任意の $m \in g^*S$ で成立する。 $g^*S \in \mathcal{E}(W)$ の一意性より、ついに $y \circ g = \alpha(g)$ が結論づけられる。

(一意性の証明)

別の射 $y' : Y \rightarrow Z$ も α を引き起こす、すなわち任意の $g \in R$ について $y' \circ g = \alpha(g)$ を満たすとする。このとき $y = y'$ となることを示す。

任意の $f \in S$ および任意の $k \in f^*R$ をとる。 $f \circ k \in R$ であるから、

$$y \circ (f \circ k) = \alpha(f \circ k) = y' \circ (f \circ k)$$

となる。これは $(y \circ f) \circ k = (y' \circ f) \circ k$ を意味し、2つの射 $y \circ f$ と $y' \circ f$ が有効エピ射的篩 f^*R 上で一致することを示す。一意性より $y \circ f = y' \circ f$ が得られる。

これが任意の $f \in S$ について成り立つため、今度は2つの射 y と y' が有効エピ射的篩 S 上で一致することを示す。 S の一意性により、 $y = y'$ が結論づけられる。

以上により推移律が証明され、 $\mathcal{E}$ は Grothendieck 位相をなす。証明終。

4. 具体例による考察

ここでは、ファイバー積を持たない圏、およびファイバー積を持つが極限と余極限の混同を避けねばならない圏の例を通して、有効エピ射の振る舞いを精査する。

4.1. ファイバー積を持たない半順序集合 (Poset) の例

例 4.1.1 : 下限を持たない半順序集合

半順序集合 $(P, \leq)$ は、要素を対象とし、 $x \leq y$ のときにただ1つの射 $x \rightarrow y$ が存在する圏 $\mathcal{B}$ とみなせる。この圏において、「ファイバー積 $x \times_y z$ 」は「 x と z の最大下限 (infimum)」に相当する。したがって、最大下限を持たない順序集合（例えば、中間要素が2つ並行して存在するひし形のようなハッセ図を持つ部分集合）においては、この圏はファイバー積を持たない。

しかし、このような圏でも篩と有効エピ射族の概念はwell-definedに機能する。要素 $y \in P$ に対する要素の族 $\{x_i\}_{i \in I}$ （すべての i で $x_i \leq y$ ）が生成する篩 S が有効エピ射族になる条件を考えると、任意の $z \in P$ について次が成立することが要求される。

「すべての i について自然変換の成分 $S(x_i) \rightarrow h_z(x_i)$ が定まる」ことは、単に「すべての i で $x_i \leq z$ 」であることを意味する。このとき全単射の条件は、「すべての i で $x_i \leq z$ ならば、必ず $y \leq z$ が成り立つ（そしてそのような射は一意である）」ことに他ならない。

これはまさに、 y が $\{x_i\}_{i \in I}$ の最小上界 (supremum)、すなわち余極限であることの定義である。したがって、ファイバー積が存在しなくても、余極限（上限）が存在すれば有効エピ射族は機能し、「上限に収束する族」がカノニカル位相の被覆となる。

4.2. 環の圏 Ring における核対と極限

ファイバー積の計算において、極限と余極限を混同しやすい例として、環の圏 **Ring**（単位元を持つ可換環の圏）における射 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ を取り上げる。

例 4.2.1: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ は有効エピ射ではない

環の準同型写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ (包含写像) を考える。この写像は全射ではないが、エピ射 (epimorphism) である。これが有効エピ射であるかを判定するために、**Ring** における核対 (kernel pair)、すなわち f と f 自身のファイバー積 $\mathbb{Z} \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Z}$ を計算する。

Ring における極限 (引き戻し) は台集合の圏 **Set** と同様に構成されるため、以下のようになる。

$$\mathbb{Z} \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid f(x) = f(y)\}$$

f は単射であるため、 $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ である。したがって、この核対は単なる対角成分 $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ に同型である。このとき、ファイバー積からの2つの射影 $p_1, p_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ はどちらも恒等射 (identity morphism) $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ となる。

恒等射同士の余等化子 (coequalizer) は $\mathbb{Z}$ 自身 (および恒等射 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$) である。 $\mathbb{Q}$ にはならない。定義により、射が有効エピ射であるためには、自身の核対の余等化子であることが必要であるが、 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ はこの性質を満たさないため、有効エピ射ではない。

5. モノイド圏と連続写像における有効エピ射

ここからは、対象がただ1つしかない圏 (モノイドとみなせる圏) であり、かつその射が位相空間上の連続写像であるという特殊な設定において、カノニカル位相が空間のトポロジをどのように捉えるかを厳密に精査する。

対象が1つの圏 $\mathcal{B}$ ($\text{Ob}(\mathcal{B}) = \{\star\}$) において、射の集合 $M = \mathcal{B}(\star, \star)$ は関数の合成を積とするモノイドになる。対象が1つであるため、篩 S とは M の部分集合であり、「任意の $f \in S$ と $g \in M$ に対して $f \circ g \in S$ が成り立つ」という性質を持つもの、すなわちモノイド M の右イデアル (right ideal) である。

定理 5.1: 代数から幾何への還元 (自然変換の連続写像による表現)

空間 X 上の連続写像のモノイド $M = C(X, X)$ の右イデアル $S \subset M$ について、写像 $M \rightarrow \text{Nat}(S, M)$ が全単射になる (すなわち S が有効エピ射的な篩である) ことは、以下の2つの幾何学的条件と完全に同値である。

- 被覆条件 (結合全射; joint surjection):** $Y_S = \bigcup_{f \in S} \text{Im}(f) = X$ であること。
- 位相条件 (最終位相; final topology):** 「任意の $f \in S$ について $h \circ f$ が連続」であるような任意の関数 $h: X \rightarrow X$ が、自動的に連続写像となること。

証明

自然変換 $\alpha: S \rightarrow M$ が与えられたとする。自然変換の定義より、任意の $f \in S$ と $g \in M$ について $\alpha(f \circ g) = \alpha(f) \circ g$ が成り立つ。

空間 X の各点 x に対し、常に値 x をとる定数写像 (constant map) $c_x \in M$ を考える。任意の $f \in S$ に対して $f \circ c_x = c_{f(x)}$ であり、 S が右イデアルであるため $c_{f(x)} \in S$ である。したがって、 S は自身の像に対応するすべての定数写像を含んでいる。

自然変換の条件を用いると、定数写像 $c_y \in S$ ($y \in Y_S$) に対して、

$$\alpha(c_y) = \alpha(c_y \circ c_y) = \alpha(c_y) \circ c_y$$

が成り立つ。任意の関数 $k \in M$ について $k \circ c_y = c_{k(y)}$ であるため、 $\alpha(c_y)$ もまたある定数写像でなければならない。その値を $h(y)$ と置くと、 $\alpha(c_y) = c_{h(y)}$ となる。これにより、関数 $h: Y_S \rightarrow X$ が一意に定まる。

さらに任意の $f \in S$ と $x \in X$ に対して、

$$\alpha(f) \circ c_x = \alpha(f \circ c_x) = \alpha(c_{f(x)}) = c_{h(f(x))}$$

となる。一方で左辺は $c_{\alpha(f)(x)}$ であるから、各 $x \in X$ について $\alpha(f)(x) = h(f(x))$ 、すなわち $\alpha(f) = h \circ f$ と表現されることがわかる。

ここで、 $\alpha(f)$ は M の元（連続写像）でなければならないため、未知の関数 h は「すべての $f \in S$ と合成した $h \circ f$ が連続になる」という性質を満たす。

この α が一意な $h_0 \in M$ (すなわち連続写像 $h_0: X \rightarrow X$) によって $\alpha(f) = h_0 \circ f$ と引き起こされるための必要十分条件を考える。

もし $Y_S \subsetneq X$ であった場合、 $X \setminus Y_S$ 上で異なる値をとる複数の連続拡張が存在し得るか、あるいは h が連続拡張を持たない可能性があり、全単射性（表現可能性）が破綻する。ゆえに $Y_S = X$ (結合全射) が必要である。

また、 $Y_S = X$ であったとしても、 h が不連続関数であれば $h \notin M$ となり全射性が破綻する。したがって「各 $h \circ f$ が連続であるような任意の h は必ず連続である」という位相空間論における最終位相の条件が必要十分となる。証明終。

5.1. $X = I = [0, 1]$ の場合のカノニカル位相

区間 $I = [0, 1]$ は連結でコンパクトな Hausdorff 空間である。この圏におけるカノニカル位相の構成を精査する。

単一の連続写像 $e: I \rightarrow I$ が有効エピ射であるための条件は、それが生成する主篩が結合全射かつ最終位相を定めることである。 I から I への全射連続写像は、コンパクト空間から Hausdorff 空間への写像であるため閉写像 (closed map) となり、自動的に商写像 (quotient map) となる。したがって、この圏での有効エピ射は**全射連続写像**そのものである。

例 5.1.1：定数写像の罠（被覆条件だけでは不十分であることの反例）

篩 S がカノニカル位相の被覆となるためには、単に像が I を覆うだけでは不十分であることを示す。

S を「 I 上のすべての定数写像の集合」が生成する篩とする。すべての $x \in I$ について $c_x \in S$ なので、像の和集合は I 全体を覆っている（結合全射の条件はクリアしている）。

しかし、全く連続でない（例えば $x = 0.5$ でジャンプするような階段関数）任意の不連続関数 $h: I \rightarrow I$ を考える。任意の $c_x \in S$ に対して、 $h \circ c_x = c_{h(x)}$ となり、これは定数写像であるため常に連続である。

つまり、「すべての $f \in S$ で $h \circ f$ が連続なのに、 h 自身は不連続」という関数が存在してしまう。この不連続な h は自然変換 $\alpha(f) = h \circ f$ を与えるが、連続写像 $k \in M$ によって表現できないため、 $M \cong \text{Nat}(S, M)$ の全射性が壊れる。

結論として、 I のカノニカル位相の被覆篩は、「局所的な繋がり（開集合や収束性）を保つような非定数写像」を十分に含み、最終位相を決定できるものでなければならない。

5.2. $X = \hat{\mathbb{N}}$ の場合のカノニカル位相

一点コンパクト化 $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は、可算離散空間 $\mathbb{N}$ に集積点 ∞ を1つ付加した空間である。 $\mathbb{N}$ の各点は孤立点であり、 ∞ の開近傍は補有限集合 (有限個の点を除くすべての点を含む集合) である。

この空間における連続写像の族がカノニカル位相の被覆篩となる条件も定理 5.1 に支配されるが、極限点 ∞ におけるトポロジーの捉え方が極めて重要になる。

例 5.2.1： ∞ におけるトポロジーの喪失

S を「像が有限集合になるような連続写像全体」が生成する篩とする。 $\mathbb{N}$ の各点は孤立点であるため、像が有限集合であっても全体として $\hat{\mathbb{N}}$ を覆うことができる（結合全射）。

ここで、不連続関数 $h: \hat{\mathbb{N}} \rightarrow \hat{\mathbb{N}}$ を、「 $\mathbb{N}$ 上では $h(n) = 0$ 、ただし $h(\infty) = \infty$ 」と定義する（ ∞ で連続性が破綻している）。

S に含まれる任意の関数 f は像が有限であるため、 ∞ に収束する無限数列を像として持ち得ない。したがって、合成 $h \circ f$ は常に有限個の値しかとらない局所定数的な関数となり、必ず連続になる。

これにより、定理 5.1 の位相条件が満たされず、 S は有効エピ射的な篩ではない。

したがって、 $\hat{\mathbb{N}}$ におけるカノニカル位相の被覆篩となるためには、孤立点を定数写像でカバーするだけでなく、「 ∞ へ収束する真の無限数列を像として持つような連続写像」を必ず含み、極限点への「動き」を代数的に復元できなければならない。

6. 位相空間の開集合系の圏 $\mathbf{Open}(X)$ におけるカノニカル位相

より幾何学的な設定として、与えられた位相空間 X の開集合全体がなす圏 $\mathbf{Open}(X)$ についてのカノニカル位相を決定する。この圏はトポス理論における「層」の概念の歴史的な起源でもある。

定義 6.1：開集合系の圏 $\mathbf{Open}(X)$

位相空間 X に対して、圏 $\mathbf{Open}(X)$ を以下のように定義する。

- 対象の集合 $\mathbf{Ob}(\mathbf{Open}(X))$ は、 X の開集合全体である。
- 開集合 U, V 間の射は、包含関係 $U \subset V$ が成り立つときに限り、ただ1つの包含写像 $U \hookrightarrow V$ が存在する。それ以外のときは射は存在しない。

この圏は半順序集合 (poset) とみなせるが、例 4.1.1 とは異なり、常に有限極限（ファイバー積）を持つ。具体的には、包含写像 $U \hookrightarrow W$ および $V \hookrightarrow W$ のファイバー積は、開集合の共通部分 $U \cap V$ となる。なぜなら、 $U \cap V$ は U にも V にも含まれる最大の開集合（すなわち最大下限）だからである。

また、この圏においては、任意の開集合の族 $\{U_i\}_{i \in I}$ の余極限（最小上界）は、それらの和集合 $\bigcup_{i \in I} U_i$ によって与えられる。

この圏における対象 U 上の篩 S とは、 U の部分開集合の族であって、「ある $V \in S$ に対して $W \subset V$ なる開集合 W をとれば、必ず $W \in S$ となる」という下方閉性 (downward closedness) を満たすものである。

定理 6.2： $\mathbf{Open}(X)$ におけるカノニカル位相の決定

圏 $\mathbf{Open}(X)$ の対象 U 上の篩 S がカノニカル位相の被覆篩（すなわち有効エピ射的な篩）であるための必要十分条件は、篩に含まれる開集合たちの和集合が U に一致することである。すなわち、

$$\bigcup_{V \in S} V = U$$

が成り立つことである。換言すれば、射の族 $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i \in I}$ が有効エピ射族であることと、 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ が成り立つこと（すなわち位相空間論における通常の開被覆であること）は完全に同値である。

証明

開集合 U 上の包含射の族 $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i \in I}$ が生成する篩を S とする。定義より、 S に属する対象（開集合）は、ある $i \in I$ について $V \subset U_i$ となるような開集合 V 全体である。

定理 2.2 より、 S が有効エピ射的な篩であることの定義は、任意の開集合 $W \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Open}(X))$ に対して、以下の写

像が全単射になることである。

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(X)}(U, W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Nat}(S, h_W)$$

ここで、表現可能関手 h_W は、 $V \subset W$ のときに単集合 $\{*\}$ を値にとり、そうでないときは空集合 $\emptyset$ を値にとる関手である。

(十分性の証明)

まず、 $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ を仮定する。このとき、 S から h_W への自然変換 $\alpha: S \rightarrow h_W$ が存在すると仮定してみる。自然変換が存在するためには、任意の $V \in S$ に対して成分 $\alpha_V: S(V) \rightarrow h_W(V)$ が存在しなければならない。

もし $h_W(V) = \emptyset$ となるような $V \in S$ が存在すれば、そこへの写像は存在し得ない。したがって、自然変換が存在すること自体が、「すべての $V \in S$ について $V \subset W$ である」ことを要請する。

各 U_i は自身を U_i に埋め込む包含射によって S の元とみなせるため、すべての $i \in I$ について $U_i \subset W$ でなければならない。仮定より $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ であるから、これは $U \subset W$ であることを意味する。

$U \subset W$ であるならば、 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(X)}(U, W) = \{*\}$ であり、これが引き起こす自然変換は、各 $V \in S$ ($V \subset U \subset W$) に対して唯一の写像を与える。よって、自然変換が存在すればそれは一意であり、かつそれはただ1つの包含写像 $U \hookrightarrow W$ から誘導される。ゆえに全単射性が示された。

(必要性の証明)

逆に、上記の全単射が任意の W で成り立つと仮定する。ここで、特定の対象として $W = \bigcup_{i \in I} U_i$ をとる。

明らかに、すべての $i \in I$ について $U_i \subset W$ である。任意の $V \in S$ はある U_i の部分集合であるため、 $V \subset U_i \subset W$ が成り立つ。したがって、すべての $V \in S$ において $h_W(V) = \{*\}$ であり、これは常に自然変換 $\alpha: S \rightarrow h_W$ が（一意に）存在することを意味する。

全単射性の仮定から、この自然変換 α は、ある包含写像 $U \hookrightarrow W$ によって引き起こされたものでなければならない。すなわち、 $U \subset W$ が成り立つ。

$W = \bigcup_{i \in I} U_i$ であったから、 $U \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ が得られる。一方で各 U_i は U の部分開集合であるから $\bigcup_{i \in I} U_i \subset U$ は自明に成り立つ。したがって $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ であることが結論づけられる。証明終。

結論：

位相空間の開集合系の圏 $\mathbf{Open}(X)$ においては、圏論的な「カノニカル位相」という極めて抽象的な概念が、私たちが位相空間論で最初に学ぶ「開被覆 (open cover)」の概念と完全に一致することが厳密に示されました。これは、表現可能関手と米田の補題に基づく抽象的な定式化が、空間の貼り合わせ（局所から大域への性質の拡張）という直観的な幾何学的行為を過不足なく捉えていることを物語っています。

参考文献

- Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0927-0> (Grothendieck topology および $\mathbf{Open}(X)$ における層に関する標準的なテキスト).
- Borceux, F. (1994). *Handbook of Categorical Algebra: Volume 3, Categories of Sheaves*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511525872> (Effective epimorphism およびカノニカル位相の推移律などの厳密な証明について).
- Johnstone, P. T. (2002). *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Oxford University Press.
<https://global.oup.com/academic/product/sketches-of-an-elephant-9780198524960> (一般の圏における有効エピ射的篩が Grothendieck 位相をなすための条件について).
- nLab authors. (n.d.). *Canonical topology*. nLab. Retrieved from <https://ncatlab.org/nlab/show/canonical+topology>